

用含有双可变参数的差分生长模型模拟胸径生长过程*

田玉梅¹ 于治军² 方昆升³ 唐小焱⁴

(1. 吉林省榆树市林业局, 吉林 长春 130400; 2. 国家林业局森林病虫害防治总站, 辽宁 沈阳 110034;
3. 广州天权信息科技有限公司, 广东 广州 510635; 4. 贵州财经大学, 贵州 贵阳 550025)

摘要 使用 Schnute 模型模拟了单木胸径生长过程, 并与其它 7 个常用的生长模型进行了对比分析。研究表明, Schnute 模型实际上是含有 2 个可变参数的差分生长模型, 可由 4 参数的 Chapman-Richards 模型导出。在模型应用中, 可用 2 个不同年龄时期的胸径观测值估计 Schnute 模型中 2 个可变参数, 并使拟合的曲线通过这两个观测值, 因而能够大幅提高模型预测精度。当 Schnute 模型作为普通回归模型使用时, 其拟合效果与预测效果与其它模型相比并无明显优势。研究所用数据为火炬松人工林 16 年逐年观测数据, 并用 SAS (V8) 进行模型拟合与验证。

关键词 胸径; Schnute 模型; 代数差分模型; 单木

中图分类号: S758 文献标识码: A 文章编号: 2096-2053 (2018) 04-0036-07

Using Algebraic Difference Model with Two Variable Parameters to Simulate the Growth of Diameter at Breast Height

TIAN Yumei¹ YU Zhijun² FANG Kunsheng³ TANG Xiaoyan⁴

(1. Yushu Forestry Bureau, Changchun, Jilin 130400, China; 2. Forest Pest Control Station of the National Forestry and Grassland Administration, Shenyang, Liaoning 110034, China; 3. Guangzhou Tianquan Information Science & Technology Co Ltd., Guangzhou, Guangdong 510635, China; 4. Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang, Guizhou 550025, China)

Abstract Schnute model was used to simulate the growth of diameter at breast height (DBH) for single tree, and it was compared with other seven commonly used growth models. The research results showed that Schnute model was virtually an algebraic difference growth model with two variable parameters, derived from a four-parameter Chapman-Richards model. When simulating the growth of DBHs, two previous DBH observations could be used to estimate the two variable parameters, and the estimated curve would fit between the two DBH observations, thus remarkably increased the accuracy of prediction. When the Schnute model was used as an ordinary regression model, however, it only slightly outperformed other models with respect to model fitting and prediction. Annual DBH observations spanning sixteen years of Loblolly pine were used for model fitting and validation with SAS (V8).

Key words diameter at breast height; Schnute model; algebraic difference model; single-tree

胸径生长模型是林分生长预估模型系统的重要组成部分。对胸径生长的研究多以胸径生长量为研究对象。一般将胸径生长量视为林木大小、

林木竞争关系及立地条件的多元线性函数^[1-3]。建模方法上, 除常规的线性与非线性回归模型外, 还有混合参数模型^[3]、人工神经网络^[4]及时间序

* 第一作者: 田玉梅 (1965—), 女, 高级工程师, 主要从事森林经理学研究, E-mail:524114516@qq.com。

通信作者: 方昆升 (1968—), 男, 主要从事地理信息系统及数理统计应用研究, E-mail:3032621439@qq.com。

列模型^[5-6]等。从研究竞争关系和立地条件等因子对胸径生长的影响角度来看，包含多个环境因子的模型有助于理解和分析这些因子对胸径生长的影响作用。从胸径预测角度来看，以这些因子作为预测变量，一方面增加了模型使用难度；另一方面，在预测胸径生长时，对预测变量进行预测的预测误差必然导致胸径预测精度的下降。胸径与其它测树因子不同，通过常规技术手段即可一次性地获取一定时间段内直径生长序列，如何利用胸径的这一特点值得深入研究。以一定年度间隔的两次胸径值(d_1, t_1)和(d_2, t_2)为例，两次观测值很大程度上体现了竞争关系、立地因子、气象因子及遗传潜力等多因素综合作用的结果。因而，如何充分利用以往胸径观测值中所蕴含的信息，更为准确地预测胸径生长具有重要意义。

Schnute 模型由 Schnute^[6-7] 首次提出，一些常用的生长模型如 Gompertz、Logistic 和 Chapman-Richards 模型均可视为 Schnute 模型的特例。Schnute 模型在林业中的首次应用当属 Bredenkamp 和 Gregoire 于 1988 年发表的拟合直径生长模型应用^[8]。Dorado^[9] 用 Schnute 模型描述了西班牙辐射松 (*Pinus radiata*) 树高与胸径关系的非线性模型。李凤日等^[10] 注意到 Schnute 模型并非为一新的理论生长方程，而与 Richards 方程完全相同，属于 Richards 函数的另一种解的表达式。同时，SAS 作为一种功能强大的数据分析软件，近年来越来越普遍地应用于林业研究的统计分析过程中。常见的 SAS 应用实例有线性模型过程 PROC GLM^[12]、线性混合模型过程 PROC MIXED^[12-13]、相关性分析过程 PROC CORR^[12,14]、聚类分析过程 PROC CLUSTER^[12,15]。本研究运用 SAS(V8) 的 PROC NLIN 过程完成模型拟合，并通过 SAS 的 PROC IML 过程进行了模型验证，以研究如何充分利用多个以往胸径观测值，提高胸径预测的精度问题。

1 材料与方 法

1.1 Schnute 模型的推导

假设可用 4 参数的 Chapman-Richards 模型描述胸径生长过程，那么则有模型 (1)

$$E(d) = \alpha_0 \left(1 - \alpha_3 e^{-\alpha_1 t}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}} \dots\dots\dots(1)$$

这里 d 为胸径， $\alpha_0 \sim \alpha_3$ 为模型参数， t 为年龄，

E 为数学期望运算符。如果限制参数 α_3 的值为 0，模型 (1) 则为常用的 3 参数 Chapman-Richards 模型。利用代数差分法，以模型 (1) 为基本模型可以推导出 Schnute 模型 (2)。

$$E(d) = \left[b_1^{\alpha_1} + (b_2^{\alpha_2} - b_1^{\alpha_2}) \left(\frac{1 - \text{Exp}(-\alpha_1(t - c_1))}{1 - \text{Exp}(-\alpha_1(c_2 - c_1))} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha_2}} \dots\dots\dots(2)$$

这里 b_1 、 b_2 、 α_1 及 α_2 均为模型参数。假设模型 (1) 的参数 α_0 和 α_3 为随单木变化的可变参数，即不同单木的参数 α_0 和 α_3 不同；与 α_0 和 α_3 相反，参数 α_1 和 α_2 则不随单木变化，所有单木的参数取值均相同。根据差分生长模型的推导原理，需要将模型 (1) 的 α_0 和 α_3 消去。首先将模型 (1) 等价地表示为 (3)：

$$\left(\frac{E(d)}{\alpha_0} \right)^{\alpha_2} - 1 = -\alpha_3 e^{-\alpha_1 t} \dots\dots\dots(3)$$

当年龄在 t_1 和 t_2 时 ($t_1 \neq t_2$)，模型 (3) 又分别表示为

$$\left(\frac{E(d_1)}{\alpha_0} \right)^{\alpha_2} - 1 = -\alpha_3 e^{-\alpha_1 t_1} \dots\dots\dots(4)$$

$$\left(\frac{E(d_2)}{\alpha_0} \right)^{\alpha_2} - 1 = -\alpha_3 e^{-\alpha_1 t_2} \dots\dots\dots(5)$$

将 (3) 两边分别除以 (4) 并同时与 1 相减可得 (6)

$$1 - \frac{\left(\frac{E(d)}{\alpha_0} \right)^{\alpha_2} - 1}{\left(\frac{E(d_1)}{\alpha_0} \right)^{\alpha_2} - 1} = 1 - e^{-\alpha_1(t-t_1)} \dots\dots\dots(6)$$

同理，将 (5) 与 (4) 相除并与 (1) 相减可有 (7)

$$1 - \frac{\left(\frac{E(d_2)}{\alpha_0} \right)^{\alpha_2} - 1}{\left(\frac{E(d_1)}{\alpha_0} \right)^{\alpha_2} - 1} = 1 - e^{-\alpha_1(t_2-t_1)} \dots\dots\dots(7)$$

再将 (6) 和 (7) 相除可有

$$\frac{E(d_1)^{\alpha_2} - E(d)^{\alpha_2}}{E(d_1)^{\alpha_2} - E(d_2)^{\alpha_2}} = \frac{1 - e^{-\alpha_1(t-t_1)}}{1 - e^{-\alpha_1(t_2-t_1)}}$$

移项后可得

$$E(d) = \left[E(d_1)^{\alpha_2} + (E(d_2)^{\alpha_2} - E(d_1)^{\alpha_2}) \left(\frac{1 - e^{-\alpha_1(t-t_1)}}{1 - e^{-\alpha_1(t_2-t_1)}} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha_2}} \dots\dots\dots (8)$$

从以上的推导过程可见，模型(8)中的两个新参数 $E(d_1)$ 和 $E(d_2)$ 的意义分别为 t_1 和 t_2 时胸径的数学期望。模型(8)中的参数 $E(d_1)$ 和 $E(d_2)$ 与模型(1)的参数 α_0 和 α_3 一样，不同单木的参数值均不相同，是随单木变化的可变参数。模型(8)中 t_1 和 t_2 既不是预测变量，也不是模型参数，而是两个模型常数。模型常数 t_1 和 t_2 可以取任何非零值。无论 t_1 和 t_2 取何值，参数 $E(d_1)$ 和 $E(d_1)$ 的意义均为 t_1 和 t_2 时胸径的数学期望。需要说明

的是，参数 α_1 和 α_2 与原基本模型(1)中的对应参数的意义完全一致。

令模型(8)中的 $E(d_1)=b_1$, $E(d_2)=b_2$, $t_1=c_1$, $t_2=c_2$, 模型(8)可表示为 Schnute 模型(2)。如果预测一个单木未来时点 t 时的胸径，则必须首先估计参数 $E(d_1)$ 和 $E(d_2)$ ，或模型(2)中的参数 b_1 和 b_2 。由于无论与 t_1 和 t_2 取何值，参数 $E(d_1)$ 和 $E(d_2)$ 总是对应于 t_1 和 t_2 的胸径的数学期望，因而可用观测值 d_1 和 d_2 对 $E(d_1)$ 和 $E(d_2)$ 进行估计，从而识别该单木具体的生长过程曲线^[10]。

$$\hat{d} = \left[d_1^{\hat{\alpha}_2} + (d_2^{\hat{\alpha}_2} - d_1^{\hat{\alpha}_2}) \left(\frac{1 - e^{-\hat{\alpha}_1(t-t_1)}}{1 - e^{-\hat{\alpha}_1(t_2-t_1)}} \right) \right]^{\frac{1}{\hat{\alpha}_2}} \dots\dots\dots (9)$$

不难验证，当 $t=t_1$ 时 $d=d_1$ 且 $t=t_2$ 时 $d=d_2$ 。这

表 1 数据按年龄分组的描述性统计
Tab.1 Descriptive statistics grouped by age

项目 Item	树龄 Age/a							
	5	7	9	11	13	15	17	19
株数 Number	140	140	140	139	134	133	132	132
胸径均值 DHB average/cm	7.34	12.47	15.88	18.56	20.74	22.43	23.88	24.95
标准差 Sd.	1.29	1.64	1.99	2.22	2.52	2.74	2.93	3.16
最大值 Maximum	11.18	16.51	21.59	24.64	27.18	29.46	31.24	32.26
最小值 Minimum	3.81	7.62	9.91	12.19	13.46	13.97	14.48	14.48

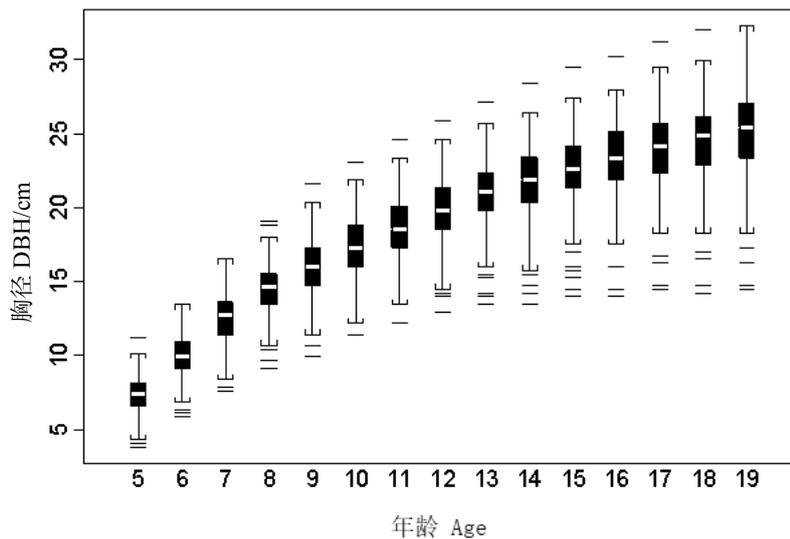


图 1 数据按年龄分组的描述性统计
Fig.1 Descriptive statistics grouped by age

一属性表明，对于任何一个给定的单木，预测曲线将同时通过生长过程中已知两个点 (d_1, t_1) 和 (d_2, t_2) ，使得模型 (9) 能更为精确地模拟直径生长过程。由于一般情况下 $d_1 \neq E(d_1)$ 且 $d_2 \neq E(d_2)$ ，分别与 d_1 和 d_2 相关联的随机误差项无疑将影响模型的预测结果。这个问题已超越本文研究主题，在此不予讨论。

1.2 数据来源

数据来源于美国弗吉尼亚理工大学 3 个火炬松拉丁名人工林试验样地。3 个样地各方面自然条件基本相似，共有 140 株树，从 5 a 到 19 a 时对胸值和树高进行了逐年观测。所有数据随机分成两部分，分别用于模型拟合和验证。拟合数据由 80 株树的数据构成，而验证数据则有 60 株树的数据。部分数据的描述性统计结果见表 1。

1.3 模型拟合与比较

除 Schnute 模型外，本文另外选取了 7 个常用的 3 参数生长模型用于对比分析 (表 2)。对所有选取的生长模型，我们用 SAS (V8) 的 NLIN 过程对拟合数据中的 80 株树进行拟合，拟合的算法

为高斯—牛顿法。获取参数估计值后，首先对拟合效果进行分析，然后对验证数据中的 60 株数用 SAS 的 IML 过程进行了验证。

表 2 选用的 3 参数生长模型

Tab.2 3-parameter growth model used in the study

模型形式 Model form	模型名称 Model name
$d = t^{\beta_2} (\beta_1 + t^{\beta_2} / \beta_0)^{-1}$	Hossfeld IV
$d = \beta_0 \text{Exp}(-\beta_1 \text{Exp}(-\beta_2 t))$	Gompertz
$d = \beta_0 (1 + \beta_2 \text{Exp}(-\beta_1 t))^{-1}$	Logistic
$d = \beta_0 (1 - \beta_2 \text{Exp}(-\beta_1 t))$	Monomolecular
$d = \beta_0 (1 - \text{Exp}(-\beta_1 t))^{\beta_2}$	Chapman-Richards
$d = \beta_0 \text{Exp}(-\beta_1 t^{-\beta_2})$	Korf
$d = \beta_0 (1 - \text{Exp}(-\beta_1 t^{\beta_2}))$	Weibull

对于模型拟合，选取了均方残差 MSE、平均绝对残差、平均残差、确定系数 R^2 及修正确定系

表 3. 用于模型比较的拟合统计量

Tab.3 Fit statistics for model comparisons

拟合统计量 Fitting statistic	表达式 Formula	理想值 The best value
均方残差 Mean square residual	$\text{MSE} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2}{n - p}$	0
确定系数 Determination coefficient	$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (d_{ij} - \bar{d})^2}$	1
修正确定系数 Corrected coefficient	$R^2_{adj} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2 / (n - p)}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (d_{ij} - \bar{d})^2 / (n - 1)}$	1
平均绝对残差 Average absolute residual	$ \bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} d_{ij} - \hat{d}_{ij} }{n}$	0
平均残差 Average residual	$\bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (d_{ij} - \hat{d}_{ij})}{n}$	0

数 R^2_{adj} 。各项拟合统计量的定义如下。对于验证数据,我们仅用均方残差 MSE 进行评价比较。

下面以 Korf 模型为说明模型验证方法。在获取模型参数估计之后,我们用式(10)来预测验证数据中所有 60 株树的从 5 年到 19 年的胸径值,并计算 MSE。

$$\hat{d} = \hat{\beta}_0 e^{(-\hat{\beta}_1 t - \hat{\beta}_2)} \dots \dots \dots (10)$$

Schnute 模型即可作为普通回归模型,又可作为差分生长模型使用。Schnute 模型除了用上述方法验证外,还用差分生长模型的方法进行了验证。选取 5 年间隔的两对观测值 (d_1, t_1) 和 (d_2, t_2) , 并令 $t=t_2+5$ 年,代入模型(9)以获取 5 年后的模型预测值,并计算 MSE 值。选取以 5 年为间隔,主要是考虑数据涉及的年龄跨度仅为 16 年,无法进行更长年龄间隔的预测分析。

2 结果与分析

8 个生长模型的拟合统计量列于表 4。从各项

拟合统计量可以看出, Schnute 模型的拟合效果仅略高于其它生长模型,与 Korf 模型相差无几。以往研究表明, Korf 模型可最优地模仿胸径生长过程^[11]。由于 Schnute 模型为 4 参数模型,而其它模型均为 3 参数模型,因而 Schnute 模型拟合效果好于其它模型是理所应当的。由于较多的模型参数,总是导致较低的 MSE 和较高的 R^2 , 拟合统计量 R^2_{adj} 考虑了参数数目对 R^2 的影响,并对此进行修正。Schnute 和 Korf 的 R^2_{adj} 分别为 0.830 1 和 0.829 9,说明拟合效果并无显著差异, Schnute 模型仅略好一点而已。与其他生长模型相比, Schnute 模型的优势同样微乎其微。

在模型验证时,当 Schnute 模型作为普通回归模型使用并与其它生长模型相比,仅表现出微小的优势。Schnute 模型预测的 MSE 为 5.3,而其它模型的预测 MSE 虽然均高于此值,但基本上为 5.5 左右。可见 Schnute 模型作为普通回归模型使用时,与其它模型相比并未体现出明显的优势。

我们以 5 年间隔取 t_1 、 t_2 和 t 值,并将 t_1 和

表 4 模型拟合统计量
Tab.4 Fit statistics of model fitting

模型 Model	拟合统计量 Fitting statistic				
	均方残差 MSR	平均绝对残差 MAR	平均残差 MR	R^2_{adj}	R^2
Korf	5.5892	1.7408	-0.0012446	0.8302	0.8299
Chapman-Richards	5.6366	1.7533	-0.0040866	0.8288	0.8285
Weibull	5.6699	1.7648	-0.0081984	0.8277	0.8275
Gompertz	5.6772	1.7644	-0.0046129	0.8275	0.8272
Hossfeld IV	5.6185	1.7485	-0.0042302	0.8293	0.8290
Logistic	5.7885	1.7485	-0.0042302	0.8241	0.8238
Monomolecular	5.5976	1.7426	-0.0000016	0.8299	0.8297
Schnute	5.5840	1.7377	-0.0000237	0.8305	0.8301

表 5 Schnute 模型作为差分生长模型的预测结果分析
Tab.5 Analysis of prediction error for Schnute model when used as algebraic difference model

参量 Parameter	MSE	b_1	b_2
$t_1=5, t_2=10, t=15$	1.7572	0.0007222	10.4137
$t_1=6, t_2=11, t=16$	1.1800	0.0000029	6.5102
$t_1=7, t_2=12, t=17$	0.9937	0.0011330	5.8684
$t_1=8, t_2=13, t=18$	0.5562	0.0003978	3.4114
$t_1=9, t_2=14, t=19$	0.4933	0.0000954	3.0341

t_2 及所对应的胸径值 d_1 和 d_2 代入预测模型 (9), 计算均方误差 MSE, 其结果列于表 5。当 $t_1=5$, $t_2=10$, $t=15$ 时, 由于胸径生长在幼龄时的不规则性, 此时预测均方误差 MSE 最大, 为 1.757 2, MSE 的平方根与胸径平均值的比 (相当于变异系数) 小于 0.06。当 $t_1=9$, $t_2=14$, $t=19$ 时, 预测误差的 MSE 值最小, 仅为 0.493 3。可见当 Schnute 作为差分生长模型时, 能够显著地提高模型预测精度。这主要由于普通回归模型仅以一条回归曲线代表所有的胸径生长过程, 并没有考虑不同个体间生长过程的差异。而 Schnute 模型作为差分生长模型使用时, 将 b_1 和 b_2 同时作为随单木变化的可变参数, 并用 (d_1, t_1) 和 (d_2, t_2) 两个观测值识别一个单木的生长过程, 由此确定的胸径生长过程也就各不相同, 而且能更好地模拟胸径生长过程。

我们也研究了预测 MSE 与 $\Delta_1=|t_2-t_1|$ 及与 $\Delta_2=|t-t_2|$ 的关系, 即 MSE 与 2 次胸径观测值的年龄距离 Δ_1 、预测时间跨度 Δ_2 的关系。结果表明 MSE 与 Δ_1 大体上成反比例关系, 而与 Δ_2 成正比例关系。以 $t_1=5$, $t_2=10$, $t=17$ ($\Delta_1=5$, $\Delta_2=7$) 组合为例, 前者 Schnute 模型的预测 MSE 为 2.752 5, 远大于 $t_1=5$, $t_2=10$, $t=15$ 组合的 1.757 2。预测精度的下降无疑是由 Δ_2 变大而导致的。说明了随着预测时间跨度 Δ_2 变大, 预测误差的 MSE 增加。当 $t_1=5$, $t_2=12$, $t=19$ ($\Delta_1=7$, $\Delta_2=7$) 时, 由于 Δ_1 值变大, 在 Δ_2 同为 7 年的前提下, MSE 仅为

1.7234。MSE 频数分布直方图见图 2。可见绝大多数的 MSE 小于 4, 约有 50% 的 MSE 在 [0,1] 区间内。因而可以推论, 加大 Δ_1 值可以对冲由于预测时间跨度 Δ_2 变大所导致 MSE 增加。

我们用 $t_1=5$ 和 $t_2=12$ 时胸径值代入模型 (9), 对验证数据中所有 53 株单木的胸径生长过程进行了验证。选取模拟效果最好和最差的单木各 3 株列于图 3。如果模型 (9) 所示, 图 3 中所有曲线均通过 $t_1=5$ 和 $t_2=12$ 时的 2 个点。图 3 展示了 Δ_1 和 Δ_2 对预测的影响作用。例如图 3b, 两个胸径观测值未能充分反应胸径的生长过程, 并导致拟合曲线失真。由图 2MSE 频数分布的直方图可见, 这种模拟失真的情况所占比例不多于 10%。对于多数单木的生长过程, 有两个可变参数的 Schnute 模型可以很好地描述胸径生长过程。

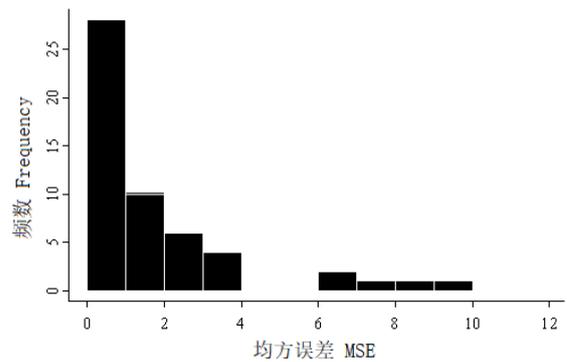


图 2 MSE 分布直方图
Fig.2 Histogram of MSE

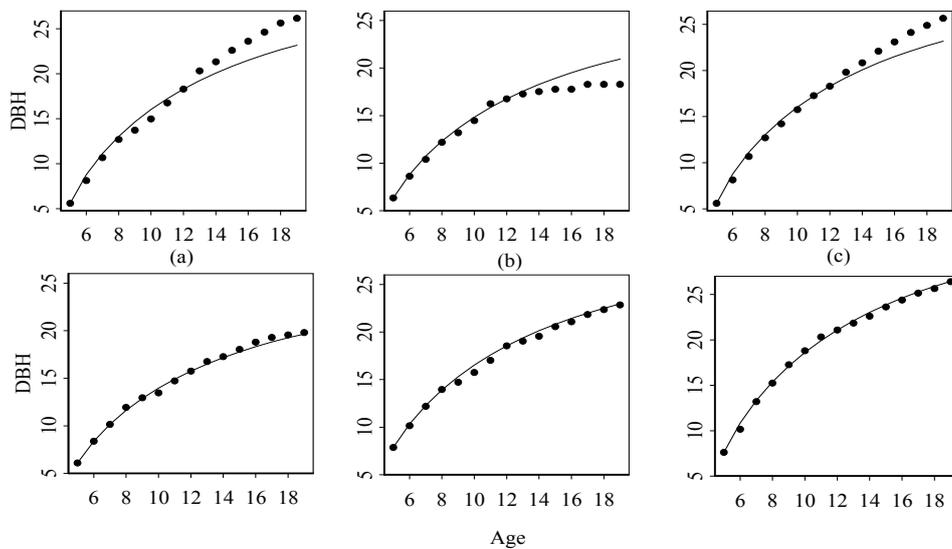


图 3 预测效果最好与最差的单木胸径观测值与拟合曲线

Fig.3 DBH observations and fitted growth curves for single trees with the best and the worst predictions

3 结论与讨论

研究表明,当 Schnute 模型作为差分生长模型时,可极大地提高模型的预测精度。这一点主要由于该模型能够充分利用两个胸径观测值所蕴含的竞争、立地、遗传及环境信息,并反应在对胸径生长的模拟中。由于 Schnute 模型最多仅能容纳 2 个胸径观测值,因而在有多个观测值时(如一、二类调查的复位样地),Schnute 模型显然无法吸纳更多的信息。另一方面,2 个胸径观测值要求在时间上存在一定的距离,以分别提供关于胸径生长的相对独立信息。研究表明,预测 MSE 与 2 次胸径观测值的年龄距离成反比例关系,而与预测时间跨度成正比例关系。

Schnute 模型假设 4 参数 Chapman-Richards 模型中的参数 α_0 和 α_3 随单木变化而变化,而 α_1 和 α_2 则不随单木变化。这样的假设是否符合胸径生长特征本文并未做验证。如果可以指定其他参数组合为可变参数时,有可能提高模型预测精度。另外,由其它 3 参数或 4 参数的生长模型推导含有两个可变参数的差分生长模型,并与 Schnute 模型进行对比分析,可能发现更为精确的胸径生长预测模型。这些内容本文并未涉及,但将在后续的研究中完成。

Schnute 模型要求必须具有至少 2 个不同时期观测值才能提高模型的预测精度。这一条件对于胸径而言可以易满足,特别是森林资源连续清查的样地数据。但对于其它测树因子,如林分的蓄积、断面积、单位面积株数、林分优势木高及单木的树高等,除非进行定期的连续观测,否则无法一次性获得 2 个观测值。这一要求限制了 Schnute 模型在其他测树因子上的应用。如果 Schnute 模型仅作为普通回归模型使用,与 4 参数的 Chapman-Richards 模型基本完全一致,仅在模型拟合时更为容易确定参数的初始值,并易于收敛而已。

参考文献

- [1] 杜纪山. 用二类条差样地建立落叶松单木直径生长模型[J]. 林业科学研究, 1999, 12(2): 160-164.
- [2] 江希钿, 林文清, 黄良增, 等. 杉木单木直径生长及形状指数模型[J]. 福建林学院学报, 1995, 15(3): 267-271.
- [3] 雷相东, 李永慈, 向玮. 基于混合模型的单木断面积生长模型[J]. 林业科学, 2009, 45(1): 74-80.
- [4] 黄家荣, 孟宪宇, 关毓秀. 马尾松人工林单木生长神经网络模型研究[J]. 山地农业生物学报, 2004, 23(5): 386-391.
- [5] 吴承祯, 洪伟. 林木生长的多维时间序列分析[J]. 应用生态学报, 1999, 10(10): 395-398.
- [6] 罗旭, 程承旗, 冯仲科, 等. 树木直径生长的时间序列分析及模型预测[J]. 中南林业科技大学学报, 2007, 27(2): 7-12.
- [7] SCHNUTE J. A versatile growth model with statistically stable parameters[J]. Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences, 1981, 38: 1128-1140.
- [8] BREDEKAMP BV, GREGOIRE TG. A Forestry Application of Schnute's Generalized Growth Function[J]. Forest Science, 1988, 34(3): 790-797.
- [9] DORADO F C, DIEGUEZ-ARANDA U, ANTA MB, et al. A generalized height-diameter model including random components for radiata pine plantations in northwestern Spain [J]. Forest Ecology and anagement, 2006, 229: 202-213.
- [10] 李凤日, 吴俊民, 鲁胜利. Richards函数与Schnute生长模型的比较[J]. 东北林业大学学报, 1993(4): 15-24.
- [11] ZEIDE B. Analysis of Growth Equations[J]. Forest Science, 1993, 39(3): 594-616.
- [12] 胡继文, 代莹, 李振, 等. 加勒比松、湿地松苗期生长及叶绿素荧光特性[J]. 林业与环境科学, 2017, 33(4): 1-8.
- [13] 王润辉, 胡德活. SAS Proc Mixed 在林木育种试验统计中应用简介[J]. 广东林业科技, 2011, 27(3): 50-54.
- [14] 吴世军, 陈广超, 徐建民, 等. 巨桉种源/家系多点遗传变异及选择比较 [J]. 广东林业科技 2016, 32(6): 10-15.
- [15] 康敏明, 杨海燕, 陈红跃, 等. 34种阔叶树种早期生长比较[J]. 广东林业科技, 2006, 22(4): 83-87.